Institut la centrale   Analyse 2   Serie de Fourier

1/ serie trigonometrique:

Déf: Toute serie de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

2/ Proposition: Si les series $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent absolument alors la serie $\sum_{n\geq 0} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ convergent uniformement sur $\mathbb{R}$

3/ Proposition: Si (a_n) et (b_n) sont 2 suites à termes positifs decroissantes et convergent vers 0 alors $\sum_{n\geq 0} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ converge pour tout $x\neq 2k\pi$ la converge est uniforme sur tout intervalle $[a,b]$ ne contenant pas $2k\pi$.

4/ Serie de Fourier: Soit f une fonction periodique, de periode 2π et ~~continue par morceaux~~ localement intégrable en $[-\pi,\pi]$. On appelle serie de Fourier de f qu'on note SF(f) serie trigonométrique $SF(f)=a_0+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ dont les coefficients de Fourier sont définies par: $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad \text{et} \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \;;\; \forall n\geq 1$$

5/ Remarques:

a/ Si f est periodique de periode 2π alors on peut remplacer l'intervalle $[-\pi,\pi]$ par $[0,2\pi]$ ou en general par $[-\pi+\alpha,\pi+\alpha]$, $\alpha\in\mathbb{R}$

b/ • $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$ si f est impaire   • $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$ si f est paire

. Si f est paire alors $b_n=0$ et $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

. Si f est impaire alors $a_n=0$ et $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

6/ Theoreme de Dirichlet ??

Si f est derivable par morceaux sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$ alors la serie de Fourier de f converge en tout point x_0 vers la valeur:

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0^+)+f(x_0^-)\right)$$

et si f est continue en x_0 alors cette valeur est $f(x_0)$

7/ Egalité de Parseval

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-periodique, continue par morceaux, alors les series de termes generales $|a_n|^2$ et $|b_n|^2$ sont convergentes

et on a: $$a_0^2+\sum_{n\geq 1}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx$$

Remarque 1: On peut remplacer dans 4/ f continue par morceaux par f localement integrable sur $\mathbb{R}$

Remarque 2: On peut remplacer dans 6/ f derivable par morceaux par f est continue par morceaux et admet de derivées à droite et à gauche sur $\mathbb{R}$

Rappel: $\cos n\pi=(-1)^n$; $\sin(n\pi)=0$; $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0$ $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^n$

ETUSUP .com

$+\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ الأشكال الغير المحددة

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0^-$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^{\alpha}\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$ $\alpha >$

$\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{\alpha} e^{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$ $(\alpha>0)$.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Informatique
Travaux Pratiques
Algébre
Cours
Optique
Chimie
Corrigés
Mathématiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..